ORSAY
N° d'ordre :
250

LE MASER A HYDROGENE EN REGIME TRANSITOIRE

ARTICLE PRINCIPAL

recouvrant en partie la thèse de Doctorat ès-Sciences Physiques enregistrée au C.N.R.S. sous le numéro A.O.1424

AUDOIN Claude

Soutenue le 30 mai 1967 à la FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY devant le jury :

MM. A. KASTLER , Président
P. GRIVET
J.F. DENISSE
M. ARDITI

UNIV. LEIDEN BIBL.

LE MASER A HYDROGÈNE EN RÉGIME TRANSITOIRE (1)

Par CLAUDE AUDOIN (2),

Section d'Orsay du Laboratoire de l'Horloge Atomique,
Institut d'Électronique Fondamentale, Faculté des Sciences, Orsay.

Résumé. — Nous montrons que l'étude du comportement dynamique du maser à hydrogène, au voisinage de la valeur d'équilibre du niveau d'oscillation, permet la mesure directe du temps de relaxation T_1 des atomes d'hydrogène, ainsi que celle de l'amplitude du champ électromagnétique dans la cavité résonnante.

L'effet d'un champ magnétique statique inhomogène couplant entre eux les sous-niveaux Zeeman $F = 1$ est examiné en détail. Nous calculons l'erreur systématique sur la mesure de T_1 résultant de la présence d'un tel champ magnétique et nous montrons qu'elle peut être rendue facilement négligeable.

Abstract. — We show here that the study of the dynamic behaviour of the atomic hydrogen maser near the equilibrium oscillation level allows us to measure directly the relaxation time T_1 of the hydrogen atoms as well as the magnitude of the electromagnetic field in the resonant cavity.

The effect of a static inhomogeneous magnetic field coupling the Zeeman sub-levels $F = 1$ between them is discussed in detail. We calculate the systematic error on the measurement of T_1 resulting from the presence of such a magnetic field and show that this error can be easily made negligible.

Introduction. — L'oscillateur à hydrogène atomique a été mis au point en 1960, à l'Université de Harvard, dans l'équipe du Professeur Ramsey [1].

Il utilise la transition de structure hyperfine $F = 1,\ M = 0 \rightarrow F = 0,\ M = 0$, de l'atome d'hydrogène à l'état fondamental $1^2S^{1/2}$.

La fréquence de transition, extrapolée en champ magnétique nul, est, dans l'échelle de temps atomique A_1 ($C_S = 9\,192\,631\,770$ Hz) [2] :

$$f_0 = 1\,420\,405\,751{,}778 \text{ Hz} \pm 0{,}016 \text{ Hz}.$$

La caractéristique essentielle de ce type d'oscillateur est que les atomes restent en interaction avec le champ électromagnétique pendant un intervalle de temps long — quelques dixièmes de seconde — pour compenser la petitesse des éléments de matrice de la transition dipolaire magnétique.

Le confinement des atomes d'hydrogène dans la région centrale d'une cavité résonnante (mode TE_{011}) est obtenu en imposant aux atomes d'un jet de pénétrer dans un ballon dont ils s'échappent au bout d'un temps de séjour moyen de 0,5 s environ. L'état interne des atomes n'est pas sensiblement modifié par les quelque 10^4 chocs sur la paroi du ballon lorsqu'elle est recouverte de fluoro-éthylène (« Téflon »).

Si l'on a préalablement enrichi la population du niveau d'énergie supérieur, les atomes peuvent alors fournir de l'énergie au champ électromagnétique par émission stimulée. L'auto-oscillation apparaît lorsque cette énergie compense les pertes par effet Joule dans les parois de la cavité résonnante et les circuits de mesure.

Intérêt de l'étude dynamique du maser à hydrogène. — Jusqu'alors, le maser à hydrogène fonctionnant en auto-oscillateur a surtout été étudié en vue des applications suivantes :

1) Réalisation d'étalons actifs de fréquence [3], [4], [5] dont les performances sont actuellement inégalées;
2) Détection de résonance de particules paramagnétiques introduites dans le gaz d'hydrogène [6].

Dans ces études, le niveau d'oscillation est maintenu stationnaire et on n'a pas — semble-t-il — porté attention au régime transitoire provoqué par une variation brusque des conditions de fonctionnement.

Comme nous le montrons, l'observation du comportement dynamique du niveau d'oscillation, du maser à hydrogène, au voisinage des conditions d'équilibre, rend possible la mesure du temps de relaxation T_1 des atomes d'hydrogène dans les conditions d'oscillation. Cette mesure est facilitée par l'emploi d'une boucle de réaction qui permet de faire varier le coefficient de surtension de la cavité résonnante, et par là même le niveau d'oscillation dans de grandes limites. Cet artifice expérimental permet également de déter-

(1) Cette étude est subventionnée par le C.N.R.S. et la D.R.M.E.

(2) Cet article recouvre la première partie d'une thèse de Doctorat ès Sciences Physiques soutenue le 30 mai 1967 devant la Faculté des Sciences de Paris. Elle est enregistrée au C.N.R.S. sous le n° A.O. 1424.

miner, en valeur relative, la densité d'atomes dans le ballon de stockage.

Par l'exploitation de ces nouvelles méthodes de mesure, il est possible de déterminer la section efficace d'échange de spin entre atomes d'hydrogène, ainsi que l'un des paramètres fondamentaux de ce type d'oscillateur : le paramètre q introduit par Ramsey *et al.* [7].

Les prolongements de cette étude sont également importants si l'on considère que l'effet du bruit de fond, qui détermine la stabilité à court terme de l'oscillateur, peut être calculé comme celui d'une petite perturbation aléatoire du régime stabilisé [8].

Le comportement dynamique du niveau d'oscillation que nous avons étudié a été prévu pour le maser à ammoniac par Grasyuk et Orayevskiy [9], puis par Orayevskiy et Uspenskiy [10] qui ont adopté une démarche différente pour l'établissement des propriétés du milieu actif. A notre connaissance, la vérification expérimentale n'a pas été possible dans ce cas.

I. L'APPROXIMATION A DEUX NIVEAUX

Afin de dégager les résultats essentiels de notre étude, nous supposons tout d'abord que les deux niveaux participant à la transition d'horloge $\Delta M = 0$ se comportent comme s'ils étaient seuls [11]. La validité de cette hypothèse sera précisée dans la deuxième partie.

I.1. **L'opérateur densité des atomes d'hydrogène.** — Nous utilisons le formalisme de l'opérateur densité, qui convient bien à l'étude du comportement d'atomes soumis, à la fois, à une perturbation cohérente et à des perturbations aléatoires.

Le système considéré a la symétrie de révolution autour de l'axe z' z. Le champ magnétique directeur et les largeurs de raies des différentes transitions possibles sont tels que celles-ci sont bien séparées. Les seuls éléments non nuls de la matrice densité, dans la base $|F, M\rangle$, sont donc : $\rho_{FM, F'M'}$ pour $M = M'$ [12].

Par un classement convenable des vecteurs de base, la matrice densité à 4 lignes et à 4 colonnes (pour l'hydrogène $F = 0$ ou 1) peut être mise sous la forme de la figure 1.

Dans l'approximation à deux niveaux, nous faisons

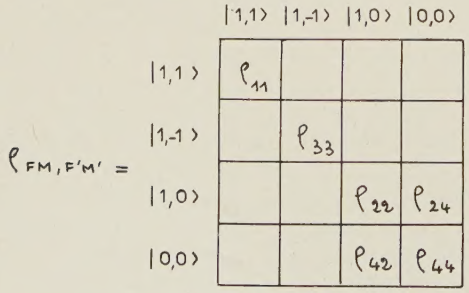

FIG. 1. — Matrice densité des atomes d'hydrogene dans la base $|F, M\rangle$.

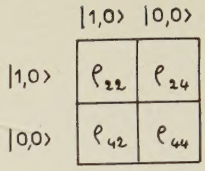

FIG. 2. — Approximation à deux niveaux : matrice densité des atomes d'hydrogène.

l'hypothèse que l'échelon de matrice correspondant aux états $|1, 0\rangle$ et $|0, 0\rangle$ évolue indépendamment des éléments de matrice ρ_{11} et ρ_{33}.

Nous appelons matrice densité dans l'approximation à deux niveaux la matrice à deux lignes et deux colonnes représentée sur la figure 2.

I.2. **Les hypothèses de l'approximation à deux niveaux.** — I.2.1. COLLISIONS AVEC ÉCHANGE D'ÉLECTRONS. — Lors d'une interaction en phase gazeuse entre deux atomes d'hydrogène, il peut y avoir échange des électrons (échange de spin) entre les deux atomes [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], ce qui tend à égaliser les populations des états $|1, 0\rangle$ et $|0, 0\rangle$ et à réduire le moment magnétique des atomes dans un état radiatif.

En conséquence de la structure simple de l'atome d'hydrogène ($I = 1/2$, $J = 1/2$), l'équation d'évolution des éléments de matrice densité non diagonaux, $\rho_{24} = \langle 1, 0 | \rho | 0, 0 \rangle$ et $\rho_{42} = \rho_{24}^*$, est linéaire, de la forme [14] :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho_{24}\right]_{\text{échange}} = -\frac{1}{T_2}\rho_{24}. \qquad (1)$$

De même, la différence de population entre les états $|1, 0\rangle$ et $|0, 0\rangle$ obéit à une équation linéaire simple. F. Grossetête a montré que si l'on considère l'interaction d'échange seule, l'opérateur densité varie selon :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\frac{1}{T_{1e}}(\rho - \rho^e) \qquad (2)$$

où ρ^e est l'opérateur densité après échange de spin total avec un autre atome d'hydrogène et T_{1e} est le temps moyen séparant deux collisions d'échange total.

Une telle collision égalise les populations des niveaux $|1, 0\rangle$ et $|0, 0\rangle$, et la propriété se conserve en présence de cohérence hyperfine entre les niveaux $M = 0$ [20]. Il en résulte $\rho_{22}^e = \rho_{44}^e$ et :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{22} - \rho_{44})\right]_{\text{échange}} = -\frac{1}{T_{1e}}(\rho_{22} - \rho_{44}). \qquad (3)$$

Nous désignons par T_{1e} et T_{2e} les constantes de temps [3] traduisant, macroscopiquement, l'effet des collisions d'échange.

---

[3] D'une façon générale, l'indice 1 est associé aux éléments de matrice diagonaux, l'indice 2 aux éléments non diagonaux. L'indice littéral caractérise la perturbation.

I.2.2. Chocs sur la paroi du ballon. — La relaxation sur la paroi du ballon a été étudiée expérimentalement par Berg [17], [19], qui interprète ses résultats en termes d'échange d'électrons entre un atome d'hydrogène et un radical libre formé sur le revêtement du ballon.

Il est généralement admis que les équations les plus simples qui décrivent le résultat de ces expériences sont de la forme [18], [19] :

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t}\rho_{24}\right]_{\text{paroi}} = -\dfrac{1}{T_{2p}}\rho_{24} \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho_{22}-\rho_{44})\right]_{\text{paroi}} = -\dfrac{1}{T_{1p}}(\rho_{22}-\rho_{44}). \end{cases} \quad (4)$$

Cette hypothèse se trouve confirmée par les résultats de nos expériences où les variations du moment magnétique induit et de la différence de population sont bien décrites par des constantes de temps uniques, respectivement T_2 et T_1.

I.2.3. Absence de relaxation entre les sous-niveaux $F = 1$. — Nous supposons que le champ magnétique statique appliqué aux atomes est parfaitement homogène de sorte que les sous-niveaux Zeeman ne soient pas couplés entre eux.

Nous lèverons cette restriction dans la deuxième partie, où l'influence de ce type de couplage sera examinée en détail.

I.2.4. Équations d'évolution de l'opérateur densité sous l'influence de la relaxation. — Les différents processus de relaxation ne sont pas corrélés. Leurs effets se superposent donc, et nous obtenons :

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t}\rho_{24}\right]_{\text{relax.}} = -\dfrac{1}{T_2''}\rho_{24}; \quad \dfrac{1}{T_2''} = \dfrac{1}{T_{2e}} + \dfrac{1}{T_{2p}} \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho_{22}-\rho_{44})\right]_{\text{relax.}} = -\dfrac{1}{T_1''}(\rho_{22}-\rho_{44}); \\ \dfrac{1}{T_1''} = \dfrac{1}{T_{1e}} + \dfrac{1}{T_{1p}}. \end{cases} \quad (5)$$

I.3. **Le spin fictif et son évolution.** — I.3.1. L'hamiltonien d'un atome. — Soient E_2 et E_4 les valeurs propres de l'énergie des états $|1, 0\rangle$ et $|0, 0\rangle$ respectivement. Elles sont telles que :

$$E_2 - E_4 = \hbar\omega_0 \quad (6)$$

où ω_0 est la pulsation de la transition hyperfine.

En présence d'une induction magnétique dépendant du temps $B(t)$, parallèle au champ directeur, les éléments de matrice de perturbation sont [21] :

$$V_{22} = V_{44} = 0; \quad V_{24} = \mu_B B(t); \quad V_{42} = V_{24}^* \quad (7)$$

où μ_B est la valeur du magnéton de Bohr ($\mu_B > 0$).

L'hamiltonien H d'un atome soumis à la perturbation cohérente est alors, en prenant pour origine des énergies la valeur $\dfrac{E_2 + E_4}{2}$:

$$H = \begin{array}{|c|c|} \hline \dfrac{\hbar\omega_0}{2} & V_{24} \\ \hline V_{42} & -\dfrac{\hbar\omega_0}{2} \\ \hline \end{array}.$$

I.3.2. Le spin fictif. — I.3.2.1. *Définition du spin fictif et de l'espace fictif.* — Suivant Feynman [22] et Abragam [23], l'équation de Schrödinger décrivant l'évolution d'un système à deux niveaux est équivalente à l'équation du mouvement d'un spin fictif $\mathbf{r}$ soumis à une induction magnétique $\boldsymbol{\Omega}$; $\mathbf{r}$ et $\boldsymbol{\Omega}$ sont définis par :

$$\mathbf{r} = \mathrm{Tr}\,(\rho\sigma)\begin{cases} r_1 = \rho_{24} + \rho_{42} \\ r_2 = i(\rho_{24} - \rho_{42}) \\ r_3 = \rho_{22} - \rho_{44} \end{cases}$$

$$\hbar\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{H}\sigma)\begin{cases} \hbar\Omega_1 = V_{24} + V_{42} \\ \hbar\Omega_2 = i(V_{24} - V_{42}) \\ \hbar\Omega_3 = \hbar\omega_0 \end{cases} \quad (8)$$

σ est l'opérateur vectoriel de Pauli.

L'équation du mouvement du spin fictif, en l'absence de relaxation, est :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = -\mathbf{r} \wedge \boldsymbol{\Omega}. \quad (9)$$

Dans le cas d'une transition $\Delta M = 0$, l'espace à trois dimensions où les vecteurs $\mathbf{r}$ et $\boldsymbol{\Omega}$ évoluent est distinct de l'espace physique.

C'est un espace fictif dont l'axe 3 porte le champ directeur fictif (exprimé en unités de pulsation). Celui-ci est très grand devant le module du champ variable ($\Omega_3/|\Omega_1| \sim 10^9$). En conséquence, l'effet Bloch-Siegert est négligeable. Nous ne considérons donc que la composante du champ variable fictif tournant dans le sens positif du plan 1, 2 (par exemple). Ce plan est le plan de phase des grandeurs fonctions sinusoïdales du temps. Les composantes du champ tournant y sont :

$$\Omega_1 = b\cos(\omega t + \varphi); \quad \Omega_2 = b\sin(\omega t + \varphi) \qquad \omega \neq \omega_0. \quad (10)$$

L'amplitude du champ tournant, exprimée en unités de pulsation, est :

$$b = \mu_B B/\hbar \quad (11)$$

où B est l'amplitude de l'induction magnétique hyperfréquence appliquée aux atomes.

Le moment magnétique des atomes, induit par le champ variable, est :

$$\mu = \mu_B(\rho_{24} + \rho_{42}) = \mu_B r_1. \quad (12)$$

Nous appelons r_1 le moment magnétique réduit, r_2 est la grandeur conjuguée (au sens de la mécanique classique), r_3 est la différence de population entre les états $|1, 0\rangle$ et $|0, 0\rangle$, rapportée à un atome.

I.3.2.2. *Évolution en présence de relaxation.* — L'effet de la perturbation cohérente se superpose à celui de la relaxation : l'opérateur densité évolue peu — dans la représentation d'interaction — pendant un intervalle de temps égal au plus grand des temps de corrélation des différentes perturbations. Le temps de corrélation τ_c à considérer correspond à la relaxation par champ magnétique inhomogène. Il est de l'ordre de 10^{-4} s, temps de vol moyen des atomes dans le ballon.

Cette dernière condition s'exprime avec nos notations, $b\tau_c \ll 1$. Elle est toujours largement remplie.

En présence de relaxation, l'équation d'évolution du spin fictif devient donc, compte tenu des équations (5) et (9) :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = -\mathbf{r} \wedge \mathbf{\Omega} - \frac{r_1 \mathbf{k}_1 + r_2 \mathbf{k}_2}{T_2''} - \frac{r_3 \mathbf{k}_3}{T_1''} \qquad (13)$$

où $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ sont les vecteurs de base orthonormés de l'espace fictif.

I.3.3. Le confinement dans le ballon. — I.3.3.1. *Moyenne sur l'instant d'arrivée.* — Dans le ballon, la loi de répartition des temps de séjour est exponentielle, de la forme $\exp -\left(\frac{t - t_0}{T_b}\right)$, où t est l'instant d'observation, t_0 est l'instant d'arrivée, T_b est le temps de séjour moyen des atomes dans le ballon.

L'état global du système, à l'instant t, dépend de l'instant t_0 d'arrivée des atomes de deux façons différentes :

1) La contribution aux propriétés du système des atomes qui ont pénétré dans le ballon à l'instant t_0 doit être pondérée par leur probabilité de présence à l'instant t d'observation;

2) Les atomes considérés dans le modèle à deux niveaux qui pénètrent dans le ballon à l'instant t sont, en pratique, dans l'état pur $|1, 0\rangle$ [24], [25]. Nous appelons $\rho(t, t)$ l'opérateur densité de ces atomes.

Le sous-ensemble (t, t_0) des atomes qui sont arrivés à l'instant t_0 $(t_0 < t)$ a acquis un état mélange. Nous appelons $\rho(t, t_0)$ l'opérateur densité de ce sous-ensemble.

L'opérateur densité global $\rho(t)$ des atomes considérés ici est alors :

$$N(t)\,\rho(t) = \int_{t_0=0}^{t_0=t} \rho(t, t_0)\, I(t_0)\, dt_0 \exp -\left(\frac{t - t_0}{T_b}\right)$$

$$N(t) = \int_{t_0=0}^{t_0=t} I(t_0)\, dt_0 \exp -\left(\frac{t - t_0}{T_b}\right) \qquad (14)$$

$I(t_0) = 0$ pour $t_0 \leqslant 0$.

L'opérateur $\rho(t)$ permet le calcul des grandeurs macroscopiques du système.

Le mouvement de $N(t)\,\rho(t)$ est déterminé par celui de $\rho(t, t_0)$ que nous avons rappelé aux paragraphes précédents. Par dérivation sous le signe somme, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}[N(t)\,\rho(t)] = \int_{t_0=0}^{t_0=t} I(t_0)\, dt_0\, e^{-\frac{t - t_0}{T_b}} \frac{\partial}{\partial t}\rho(t, t_0) - \frac{N(t)\,\rho(t)}{T_b} + I(t)\,\rho(t, t). \qquad (15)$$

La méthode utilisée est analogue à celle introduite par Lamb dans sa théorie du laser [26], [27], où les états purs sont obtenus par un procédé différent.

Elle nous a permis de généraliser, au cas où le flux d'atomes $I(t)$ n'est pas constant, l'emploi du formalisme de l'opérateur densité pour décrire le comportement d'un maser à deux niveaux.

I.3.3.2. *Moyenne sur le mouvement des atomes.* — Le mouvement des atomes est aléatoire, dans une région où la phase du champ électromagnétique est constante et où son amplitude varie peu. Les atomes sont donc soumis à une perturbation cohérente, de fréquence bien déterminée, modulée faiblement en amplitude.

Ramsey [21] a montré qu'en conséquence :

— L'élargissement par effet Doppler de la raie de résonance du système atomique est négligeable;
— Le décalage en fréquence du sommet de la raie, dû à un léger défaut de symétrie du système, est négligeable;
— Tout se passe comme si les atomes étaient immobiles, soumis à une induction magnétique d'amplitude B, indépendante de la position, égale à la valeur moyenne sur le volume du ballon de la composante B_z de l'amplitude de l'induction magnétique du mode TE_{011}.

Tout se passe donc comme si le champ magnétique réduit avait l'amplitude :

$$b = \frac{\mu_B \langle B_z \rangle_{\text{ballon}}}{\hbar}. \qquad (16)$$

I.3.4. L'équation de Bloch du système a deux niveaux. — Nous introduisons l'ensemble des spins fictifs $\mathbf{R}$ tels que :

$$\mathbf{R} = \int_{t_0=0}^{t_0=t} \mathbf{r}(t, t_0)\, I(t_0)\, e^{-\frac{t - t_0}{T_b}}\, dt_0 \qquad (17)$$

R_1 est le moment magnétique de l'ensemble des atomes, R_2 est la grandeur conjuguée, R_3 est la différence de population entre les états $|1, 0\rangle$ et $|0, 0\rangle$.

Compte tenu des équations (13) et (15), l'équation d'évolution de $\mathbf{R}$ est :

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{R}}{dt} = -\mathbf{R} \wedge \mathbf{\Omega} - \dfrac{R_1 \mathbf{k}_1 + R_2 \mathbf{k}_2}{T_2} - \left[\dfrac{R_3}{T_1} - I(t)\, r_0\right] \mathbf{k}_3 \\ \dfrac{1}{T_1} = \dfrac{1}{T_{1p}} + \dfrac{1}{T_{1e}} + \dfrac{1}{T_b}; \quad \dfrac{1}{T_2} = \dfrac{1}{T_{2p}} + \dfrac{1}{T_{2e}} + \dfrac{1}{T_b}; \\ r_0 = \mathrm{Tr}[\rho(t, t) \cdot \sigma_3]. \end{cases} \qquad (18)$$

Les constantes de temps T_1 et T_2 dépendent de la densité d'atomes dans le ballon, par l'intermédiaire des constantes de l'échange de spin (T_{1e} et T_{2e} sont inversement proportionnels à la densité d'atomes), et éventuellement, par l'intermédiaire de T_{1p} et T_{2p}, s'il existe un effet de paroi dépendant de la densité [19].

Nous nous limiterons ici au cas où le flux d'atomes a une valeur constante, imposée depuis un intervalle de temps long devant T_b. On a alors $N = IT_b$, et en introduisant $R_0 = Nr_0$, on obtient :

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = -\mathbf{R} \wedge \mathbf{\Omega} - \frac{R_1 \mathbf{k}_1 + R_2 \mathbf{k}_2}{T_2} - \frac{R_3 - R_0(T_1/T_b)}{T_1} \mathbf{k}_3. \tag{19}$$

L'évolution du système atomique est donc décrite, dans l'espace figuratif défini plus haut, par une équation de Bloch.

Il est ainsi possible, en se plaçant dans l'espace fictif, de décrire classiquement les expériences effectuées sur le maser à hydrogène, en particulier la mesure du temps de relaxation T_2 par la méthode de l'impulsion $\pi/2$ [25].

I.3.5. Comportement du système atomique. — I.3.5.1. *Mouvement du moment magnétique.* — En éliminant R_2 entre les projections, sur les axes 1 et 2, de l'équation (19), en remarquant que les excitations Ω_1 et Ω_2 sont d'amplitude lentement variable, que ω est très voisin de ω_0 et que $\omega_0 T_2$ est très grand ($\omega_0 T_2 \simeq 2 \times 10^9$), il vient :

$$\ddot{R}_1 + \frac{2}{T_2} \dot{R}_1 + \omega_0^2 R_1 = 2\omega_0 R_3 \Omega_1. \tag{20}$$

I.3.5.2. *Mouvement de la différence de population entre les états* $|1, 0\rangle$ *et* $|0, 0\rangle$. — En projetant l'équation (19) sur l'axe 3 de l'espace figuratif, et en faisant les mêmes remarques que précédemment, il vient :

$$\dot{R}_3 + \frac{R_3}{T_1} = -2\left(\overline{\frac{\Omega_1}{\omega_0} \dot{R}_1}\right) + \frac{R_0}{T_b}. \tag{21}$$

Le premier membre de cette équation est à variation lente, il est donc sensible à la valeur moyenne du second membre.

I.3.5.3. *Conclusion.* — Les équations couplées (20) et (21) décrivent le comportement du système atomique, excité par une perturbation cohérente, en présence de relaxation. La première équation représente les propriétés de résonance, à la pulsation ω_0. Le couplage, par l'intermédiaire du terme R_3, traduit la saturation de la raie de résonance.

I.4. **L'induction magnétique dans la cavité résonnante.** — En pratique, le mode TE_{011} — dont la dégénérescence est levée par la présence du ballon de quartz — est bien séparé des modes voisins. C'est le seul mode qu'il y ait lieu de considérer.

Il est excité par l'aimantation du gaz d'hydrogène vibrant à une fréquence sensiblement égale à la fréquence propre du mode.

L'aimantation est uniforme sur le volume du ballon, puisque, en vertu du mouvement des atomes, l'induction magnétique variable peut y être considérée comme uniforme.

L'emploi des équations de Maxwell permet d'établir la dépendance temporelle de l'induction magnétique [28] qui s'écrit ici :

$$\ddot{\Omega}_1 + \frac{2}{T_c} \dot{\Omega}_1 + \omega_c^2 \Omega_1 = K_1 \ddot{R}_1$$

$$T_c = \frac{2Q_c}{\omega_c}; \quad K_1 = \frac{\eta}{V_c} \mu_0 \frac{\mu_B^2}{\hbar}; \quad \eta = \frac{\langle B_Z \rangle^2_{\text{ballon}}}{\langle B^2 \rangle_{\text{cavité}}} \tag{22}$$

où T_c est la constante de temps de variation de l'amplitude du champ électromagnétique dans la cavité; ω_c est la pulsation propre de la cavité; Q_c est son coefficient de surtension; η est le coefficient de remplissage de la cavité par le milieu actif [15]; V_c est le volume de la cavité; μ_0 est la perméabilité magnétique du vide (4).

I.5. **Équations aux amplitudes et équations aux phases.** — Les équations (20), (21) et (22) déterminent en toute généralité le comportement du maser à hydrogène. Elles sont analogues à celles qui ont été établies, par une démarche différente, par Orayevskiy et Uspenskiy [10]. Elles s'appliquent à tout maser où l'approximation à deux niveaux est valable, et où la probabilité pour que les particules participant à la transition restent en présence du champ électromagnétique pendant l'intervalle de temps Δt est donnée par une loi en : $\exp(-\Delta t/T_b)$.

Nous cherchons des solutions de la forme :

$$\Omega_1 = b \cos(\omega t + \varphi); \quad R_1 = m \sin(\omega t + \psi) \tag{23}$$

les paramètres b, m, φ, ψ sont des fonctions lentement variables du temps. Les conditions suivantes sont toujours très largement remplies :

$$\frac{\dot{b}}{b}, \frac{\dot{m}}{m}, \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}, \frac{\dot{\psi}}{\psi} \ll \omega_0. \tag{24}$$

Les équations aux amplitudes sont alors :

$$\dot{m} + \frac{m}{T_2} = R_3 b \cos(\varphi - \psi) \tag{25}$$

$$\dot{R}_3 + \frac{R_3}{T_1} = -bm \cos(\varphi - \psi) + \frac{R_0}{T_b} \tag{26}$$

$$\dot{b} + \frac{b}{T_c} = \frac{1}{2} K_1 m\omega \cos(\varphi - \psi) \tag{27}$$

(4) Nous utilisons le système MKSA rationalisé.

et les équations aux phases :

$$\dot{\psi} = (\omega_0 - \omega) - R_3 \frac{b}{m} \sin(\psi - \varphi) \qquad (28)$$

$$\dot{\varphi} = (\omega_c - \omega) - \frac{1}{2} K_1 \frac{m}{b} \omega \sin(\varphi - \psi). \qquad (29)$$

I.6. **Un modèle radioélectrique pour l'étude du maser.** — Les équations qui décrivent — en valeurs instantanées — le comportement du maser sont :

$$\ddot{R}_1 + \frac{2}{T_2} \dot{R}_1 + \omega_0^2 R_1 = 2 R_3 \Omega_1 \omega_0$$

$$\dot{R}_3 + \frac{R_3}{T_1} = -bm \cos(\varphi - \psi) + \frac{R_0}{T_b}$$

$$\ddot{\Omega}_1 + \frac{2}{T_c} \dot{\Omega}_1 + \omega_c^2 \Omega_1 = -\omega^2 K_1 R_1. \qquad (30)$$

Elles suggèrent le modèle radioélectrique de la figure 3 comprenant :

1) Un amplificateur très sélectif représentant les propriétés de résonance du système atomique;
2) Un circuit de réaction peu sélectif;
3) Un contrôle de gain de l'amplificateur.

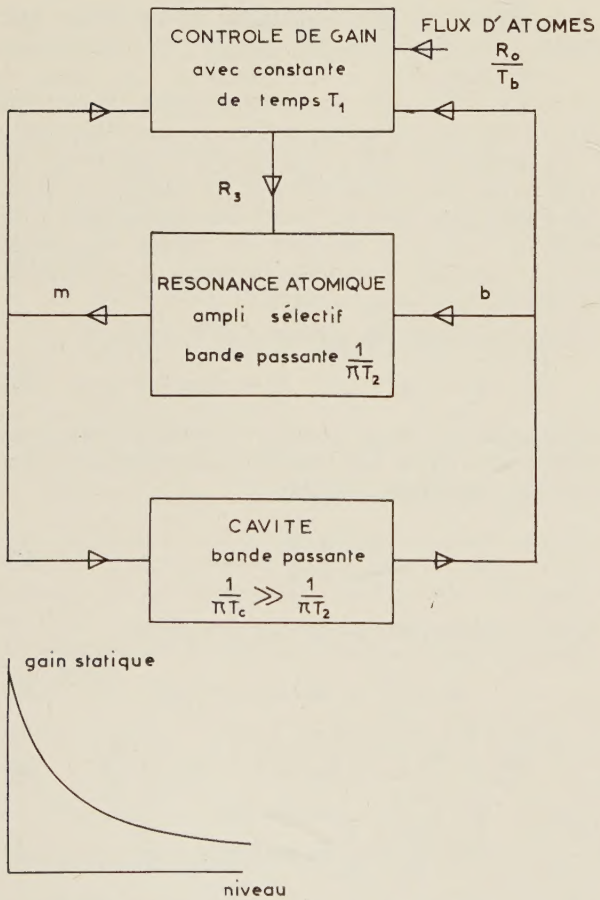

FIG. 3. — Modèle radioélectrique représentant le comportement du maser.

Le gain est commandé avec retard (T_1) par la tension de sortie d'un détecteur de phase. Le gain est fonction décroissante du niveau d'oscillation, ce qui traduit la saturation de la transition atomique. Il peut être ajusté en réglant la tension continue R_0/T_b qui représente le flux d'atomes d'état $|1, 0\rangle$.

La caractéristique essentielle de cet oscillateur est que le dispositif de limitation d'amplitude (du type « limiteur à filtre d'enveloppe ») agit avec une constante de temps T_1 qui est du même ordre de grandeur que la constante de temps T_2 de réponse du milieu actif aux variations d'amplitude. C'est ce fait qui explique que le comportement, au voisinage du régime stabilisé, du maser est différent de celui des oscillateurs classiquement étudiés [8].

En effet, le retour au niveau stabilisé de l'amplitude d'oscillation est exponentiel amorti pour ceux-ci. Nous verrons que, pour le maser à hydrogène, il peut être oscillatoire amorti.

I.7. **Le régime stabilisé.** — Le régime stabilisé est atteint lorsque les conditions expérimentales sont fixées depuis un intervalle de temps long devant T_1 et T_2. Les amplitudes et les phases sont alors des constantes.

Les équations précédemment établies permettent évidemment de retrouver les lois du régime stabilisé. Nous rappelons brièvement les résultats que nous utiliserons par la suite.

Le paramètre b caractérise l'amplitude du champ électromagnétique dans la cavité. Au régime stabilisé, il est tel que :

$$b_s^2 = K_1 Q_c \frac{R_0}{T_b} - \frac{1}{T_1 T_2} \left[1 + 4 \left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)^2 Q_c^2\right] \qquad (31)$$

où Δf est l'écart entre la fréquence propre de la cavité et la fréquence f_0 de résonance du système atomique. A l'accord, lorsque toutes les conditions expérimentales sont fixées, sauf le coefficient de surtension de la cavité, le seuil d'oscillation est tel que :

$$Q' K_1 \frac{R_0}{T_b} T_1 T_2 = 1. \qquad (32)$$

La puissance P_a rayonnée par les atomes a pour expression, à l'accord de la cavité sur f_0 [7] :

$$P_a = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \frac{R_0}{T_b} \frac{T_1 T_2 b_s^2}{1 + T_1 T_2 b_s^2}. \qquad (33)$$

La formule (31) montre que la puissance fournie aux circuits de mesure, proportionnelle à b_s^2, est une fonction linéaire du coefficient de surtension et que la pente de la droite représentative est proportionnelle à R_0 et donc à la densité d'atomes dans le ballon [29].

I.8. **Le régime transitoire.** — I.8.1. LA TENDANCE VERS L'ÉQUILIBRE. — Lorsque le niveau d'oscillation est volontairement écarté de sa valeur stabilisée b_s, par valeur inférieure par exemple, le gain du milieu actif est plus élevé qu'au niveau d'équilibre. Lorsque la cause perturbatrice est supprimée, le niveau va

alors croître, et le contrôle de gain agissant avec retard (constante de temps T_1), l'amplitude d'oscillation peut dépasser, par valeur supérieure, sa valeur d'équilibre.

L'amplitude du signal maser peut donc effectuer des oscillations de pompage autour de sa valeur d'équilibre.

Nous avons précisé les conditions sous lesquelles le niveau d'oscillation serait instable. Celles-ci n'ont pas été atteintes expérimentalement [25].

I.8.2. Le régime transitoire au voisinage du régime stabilisé [30]. — Lorsque la fréquence propre de la cavité est voisine de la fréquence de la transition atomique, le déphasage $(\varphi - \psi)$ est petit, et une étude détaillée montre qu'il le reste pendant le transitoire, si l'oscillateur est faiblement écarté de son régime d'équilibre. Le facteur trigonométrique des équations aux amplitudes est alors très voisin de 1 et nous pouvons considérer, avec une excellente approximation, que les équations aux amplitudes sont découplées des équations aux phases.

Dans les conditions expérimentales où la vitesse d'évolution de l'amplitude pour le système atomique est beaucoup plus lente que la vitesse d'établissement du champ électromagnétique dans la cavité résonnante, les équations (25), (26), (27) permettent d'obtenir :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{b}}{b}\right) + \frac{1}{T_1}\frac{\dot{b}}{b} + T_c b\dot{b} + b^2 - b_s^2 = 0 \quad \begin{cases} T_c \ll T_1, T_2 \\ T_c \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\ddot{b}}{b}\right) \ll \dfrac{\ddot{b}}{b}. \end{cases} \quad (34)$$

Au voisinage du régime stabilisé, nous posons :

$$b = b_s + \varepsilon \qquad \varepsilon \ll b_s. \quad (35)$$

L'équation (34) se linéarise alors en :

$$T_1 \ddot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon}(1 + T_1 T_c b_s^2) + 2T_1 b_s^2 \varepsilon = 0. \quad (36)$$

Nous avons opéré, dans l'étude du régime transitoire, dans des conditions telles que $T_1 T_c b_s^2 \leqslant 0{,}01$, ce qui, en pratique, est équivalent à $Q_c \leqslant 4 \times 10^5$.

Le comportement au voisinage du régime stabilisé est alors décrit par :

$$T_1 \ddot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon} + 2T_1 b_s^2 \varepsilon = 0 \qquad T_1 T_c b_s^2 \leqslant 0{,}01. \quad (37)$$

I.8.2.1. *Mouvement exponentiel amorti.* — Lorsque le niveau d'oscillation est faible $(8T_1^2 b_s^2 < 1)$, le retour au niveau stabilisé est exponentiel amorti.

A niveau d'oscillation très faible $(8T_1^2 b_s^2 \ll 1)$, les deux constantes de temps sont T_1 et $1/2T_1 b_s^2 > T_1$. Le mouvement est d'autant plus lent que le niveau est plus faible. Cette conclusion est conforme à l'observation.

I.8.2.2. *Mouvement oscillatoire amorti.* — Si le niveau d'oscillation est élevé, le retour au niveau stabilisé est oscillatoire amorti, de la forme :

$$\varepsilon = A\mathrm{e}^{-t/2T_1} \cos(\omega_1 t + \Phi); \quad 8T_1^2 b_s^2 > 1 \quad (38)$$

avec :

$$\omega_1^2 + (1/4T_1^2) = 2b_s^2 \quad (39)$$

A et Φ sont des constantes, déterminées par les conditions initiales.

Ce comportement a été prévu, dans le cas du maser à ammoniac, par Grasyuk et Orayevskiy [9], mais il n'avait pas pu être observé à notre connaissance.

Le calcul est fondé sur l'hypothèse que la probabilité de présence des particules dans le résonateur est fonction exponentielle décroissante du temps. Cette circonstance est caractéristique du maser à hydrogène; mais l'hypothèse ne nous paraît pas justifiée lorsque la cavité résonnante est transparente au faisceau de particules.

I.8.3. Principe de la mesure du temps de relaxation T_1 et de la fréquence de nutation b_s. — L'amplitude du mouvement oscillatoire amorti décroît avec la constante de temps $2T_1$ qu'il est ainsi possible de déterminer [30]. La mesure de la pseudo-pulsation ω_1 permet d'atteindre directement b_s, amplitude réduite du champ électromagnétique dans la cavité (fréquence de nutation).

La mesure de T_1 est commode lorsque le signal enregistré présente un grand nombre de maxima, c'est-à-dire lorsque la pseudo-pulsation est grande et le niveau d'oscillation élevé. C'est pourquoi nous associons à la cavité du maser une boucle de réaction comprenant un amplificateur paramétrique et un déphaseur. Nous réglons ainsi le coefficient de surtension apparent de la cavité et donc le niveau d'oscillation conformément à la relation (31). La figure 4 montre l'un des enregistrements obtenus.

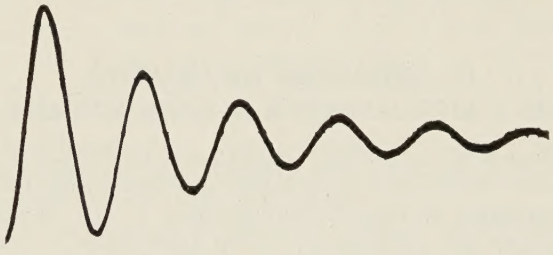

Fig. 4. — Retour oscillatoire amorti du niveau d'oscillation vers sa valeur d'équilibre. Pression source : $1{,}5 \times 10^{-1}$ torr — $Q_c = 350\,000$. La durée de l'enregistrement est de 1 s.

I.8.4. Écart a la linéarité. — La non-linéarité de l'équation (39) limite l'amplitude à donner à la perturbation. Afin de préciser ce point, nous développons cette équation, au voisinage du régime stabilisé, au second ordre en ε/b_s :

$$\frac{\ddot{\varepsilon}}{b_s} + \frac{1}{T_1}\frac{\dot{\varepsilon}}{b_s} - \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{b_s}\right)^2 + 2\frac{\varepsilon}{b_s}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{b_s}\right) b_s^2 = 0. \quad (40)$$

Cherchons une solution de la forme :

$$\varepsilon/b_s = A\mathrm{e}^{-t/2T_1} \cos(\omega_1 t + \Phi) + x = (\varepsilon/b_s)_0 + x. \quad (41)$$

En première approximation, x est solution de :

$$\ddot{x} + \frac{1}{T_1}\dot{x} + 2b_s^2 x = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{b_s}\right)_0^2 - 3b_s^2\left(\frac{\varepsilon}{b_s}\right)_0^2. \tag{42}$$

La solution x est somme de trois termes qui sont :

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \, e^{-t/T_1} & A_1 \simeq -\dfrac{A^2}{4} \\ x_2 = [A_2 \cos(2\omega_1 t + 2\Phi) + A_2' \sin(2\omega_1 t + 2\Phi)] \, e^{-t/T_1} & \begin{cases} A_2 \simeq \dfrac{5}{12} A^2 \\ A_2' \simeq \dfrac{5}{36}\dfrac{\omega_1}{T_1 b_s^2} A^2 \end{cases} \\ x_3 = [A_3 \cos(2\omega_1 t + 2\Phi) + A_3' \sin(2\omega_1 t + 2\Phi)] \, e^{-t/T_1} & \begin{cases} A_3 \simeq \dfrac{1}{18}\dfrac{1}{T_1^2 b_s^2} A^2 \\ A_3' \simeq \dfrac{1}{12}\dfrac{\omega_1}{T_1 b_s^2} A^2. \end{cases} \end{cases} \tag{43}$$

Il se superpose au mouvement en

$$e^{-t/2T_1} \cos(\omega_1 t + \Phi)$$

un mouvement exponentiel et un mouvement oscillatoire de pulsation $2\omega_1$ qui s'amortissent plus vite que le terme principal.

En pratique, nous avons opéré dans des conditions telles que l'amplitude maximale du régime transitoire soit de 10 % du niveau stabilisé. L'effet de la non-linéarité est alors faible. La précision de la mesure de T_1 est, dans l'état actuel de notre montage de mesure, limitée par le bruit de fond du récepteur plutôt que par la non-linéarité. Cette précision est de $\pm$ 5 %.

II. CONDITIONS DE VALIDITÉ DE L'APPROXIMATION A DEUX NIVEAUX

Nous étudions plus particulièrement l'influence d'un champ magnétique inhomogène provoquant des transitions entre les sous-niveaux Zeeman $F = 1$ et nous précisons les conditions — peu restrictives — sous lesquelles la mesure de T_1 conserve un sens [31].

II.1. **Développement de l'opérateur densité sur une base d'opérateurs orthonormés.** — La matrice densité a une structure en échelon particulièrement simple (*fig.* 1).

Si l'on envisage l'espace de Hilbert à 16 dimensions, dont les vecteurs de base sont les produits d'états propres $|F, M\rangle\langle F', M'|$, le vecteur représentant la matrice densité a des composantes non nulles :

— soit dans le sous-espace à quatre dimensions des états $|1, 0\rangle$ et $|0, 0\rangle$;
— soit dans le sous-espace à une dimension de l'état $|1, 1\rangle$;
— soit dans le sous-espace à une dimensions de l'état $|1, -1\rangle$.

En conséquence, six opérateurs orthonormés, linéairement indépendants, constituent un ensemble complet d'opérateurs de base [12].

Nous considérons ici (*fig.* 5) :

— d'une part, les opérateurs σ_1, σ_2, σ_3, I_A définis dans le sous-espace des états $|1, 0\rangle$ et $|0, 0\rangle$. Ce sont ceux que nous avons considérés dans l'étude de l'approximation à deux niveaux;
— d'autre part, les opérateurs F_Z et I_B appartenant aux sous-espaces de l'état $|1, 1\rangle$ et de l'état $|1, -1\rangle$.

L'opérateur densité se développe alors selon :

$$\rho = r_1\sigma_1 + r_2\sigma_2 + r_3\sigma_3 + r_4' I_A + r_5 F_Z + r_6 I_B. \tag{44}$$

Les composantes r_i sont définies par :

$$r_1 = \mathrm{Tr}(\rho\sigma_1); \quad r_2 = \mathrm{Tr}(\rho\sigma_2); \quad r_3 = \mathrm{Tr}(\rho\sigma_3)$$

$$r_4' = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\rho I_A); \quad r_5 = \mathrm{Tr}(\rho F_Z); \quad r_6 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\rho I_B). \tag{45}$$

Les grandeurs physiques correspondant à ces composantes sont, respectivement :

— le moment magnétique induit;
— le moment magnétique, conjugué au précédent, au sens de la mécanique classique;
— la différence de population entre les états $|1, 0\rangle$ et $|0, 0\rangle$, rapportée à un atome;
— la population totale des niveaux $|1, 0\rangle$ et $|0, 0\rangle$, rapportée à un atome;
— la polarisation atomique;
— la population totale des niveaux $|1, 1\rangle$ et $|1, -1\rangle$, rapportée à un atome.

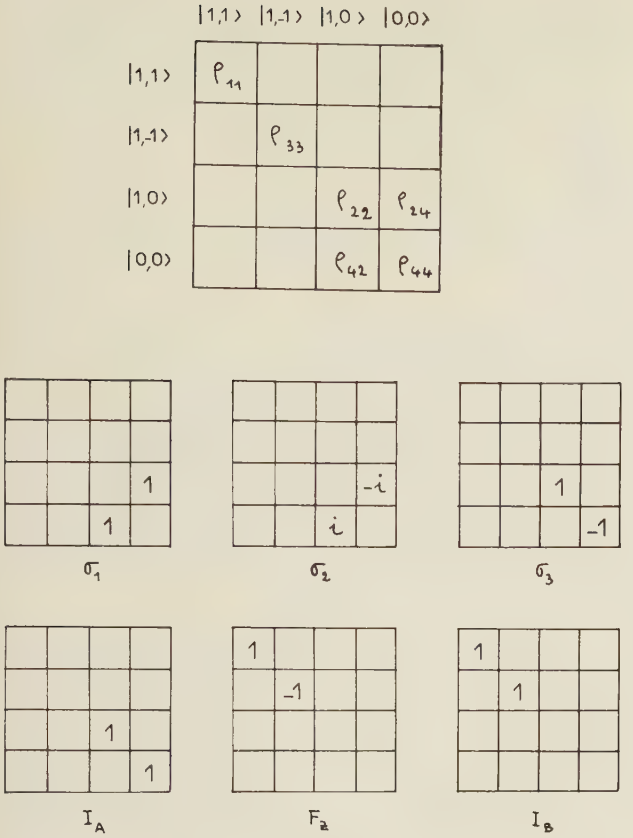

FIG. 5. — Opérateur densité et opérateurs orthonormés dans la base $|F, M>$.

Afin d'alléger l'écriture des relations suivantes, nous remplaçons r'_4 par :

$$r_4 = 1 - 4r'_4 = 1 - 2(\rho_{22} + \rho_{44}). \qquad (46)$$

D'autre part, en conséquence de la relation $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$, r_6 est déterminé lorsque r_4 est connu.

II.2. **Évolution des composantes de l'opérateur** $\rho(t, t_0)$. — Comme au chapitre précédent, nous envisageons d'abord l'évolution de la matrice densité $\rho(t, t_0)$ du sous-groupe des atomes qui ont pénétré dans le ballon à l'instant t_0 (à dt_0 près).

II.2.1. INFLUENCE DE LA RELAXATION PAR ÉCHANGE DE SPIN. — L'évolution de l'opérateur densité d'atomes d'hydrogène a été considérée en détail par Balling, Hanson et Pipkin [16] dont nous utilisons les résultats.

Nous omettons, ici, tous les termes correspondant à des effets inobservables dans les circonstances actuelles [25] (en particulier : termes liés à l'indiscernabilité des atomes d'hydrogène).

Nous ne tenons pas compte non plus du léger décalage de fréquence résultant de l'échange d'électron. Son effet sur le niveau d'oscillation du maser est parfaitement négligeable.

Avec nos notations, l'évolution de $\rho(t, t_0)$ par échange de spin s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} r_1(t, t_0) = -\dfrac{1}{T_{2e}} r_1(t, t_0) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} r_2(t, t_0) = -\dfrac{1}{T_{2e}} r_2(t, t_0) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} r_3(t, t_0) = -\dfrac{1}{T_{1e}} r_3(t, t_0) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} r_4(t, t_0) = -\dfrac{1}{T_{1e}} r_4(t, t_0) + \dfrac{1}{T_{1e}} r_5(t, t_0)\, r_5(t) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} r_5(t, t_0) = 0. \end{cases} \qquad (47)$$

II.2.2. INFLUENCE DE LA RELAXATION SUR LA PAROI. — Les équations les plus simples qui rendent compte de l'expérience sont [18] :

$$\frac{\partial}{\partial t} r_i(t, t_0) = -\frac{1}{T_{2p}} r_i(t, t_0) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} r_i(t, t_0) = -\frac{1}{T_{1p}} r_i(t, t_0) \quad \text{pour} \quad i = 3, 4, 5. \qquad (48)$$

II.2.3. INFLUENCE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE INHOMOGÈNE. — Un champ magnétique inhomogène longitudinal n'a pratiquement pas d'influence à cause de la faible variation de la fréquence de la transition $\Delta M = 0$ avec le champ magnétique (dépendance au second ordre). La raie de résonance reste homogène [21].

Sous l'effet d'un champ magnétique inhomogène transversal, les atomes sont soumis, dans leur mouvement, à un champ magnétique aléatoire, perpendiculaire au champ directeur. Le spectre de Fourier de la perturbation a une étendue de l'ordre de $1/\tau_0$ où τ_0 est le temps de vol moyen des atomes dans le ballon ($1/\tau_0 \sim 10$ kHz). Cette perturbation provoque des transitions entre les niveaux $F = 1$ si le champ directeur a une valeur telle que l'écart ω_Z entre ces sous-niveaux Zeeman, exprimé en unité de pulsation, satisfait à l'inégalité $\omega_Z \tau_0 < 1$.

L'influence d'un champ magnétique inhomogène transversal est donc d'autant plus petite que le champ directeur a une valeur plus élevée.

La variation de la matrice densité, sous l'influence de cette perturbation, a été exprimée par Crampton [18], ainsi que par Vanier et Vessot [32]. Avec nos notations, elle s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} r_1(t, t_0) = -\dfrac{1}{T_m} r_1(t, t_0) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} r_2(t, t_0) = -\dfrac{1}{T_m} r_2(t, t_0) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} r_3(t, t_0) = -\dfrac{1}{T_m} r_3(t, t_0) + \dfrac{1}{T_m} r_4(t, t_0) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} r_4(t, t_0) = -\dfrac{2}{T_m} r_4(t, t_0) + \dfrac{2}{T_m} r_3(t, t_0) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} r_5(t, t_0) = -\dfrac{1}{T_m} r_5(t, t_0). \end{cases} \qquad (49)$$

La fonction d'autocorrélation de la perturbation est mal connue [21]. On admet, en général, que T_m satisfait à une relation du type :

$$\frac{1}{T_m} = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \langle B_t^2 \rangle \frac{\tau_c}{1 + (\omega_Z \tau_c)^n} \quad \text{avec} \quad n \geqslant 2 \qquad (50)$$

où γ est le rapport gyromagnétique de l'électron libre,

B_t est une composante transversale du champ magnétique inhomogène.

II.3. **Évolution des composantes de l'opérateur densité global $\rho(t)$.** — II.3.1. Définition de l'opérateur densité global et de ses composantes. — Le mouvement de l'opérateur densité global $\rho(t)$, introduit comme précédemment, est déterminé par celui des sous-ensembles (t, t_0), par la composition du jet atomique et par la constante de temps de pompage du ballon (formule (15)).

Les projections de l'opérateur $\rho(t)$ sur la base orthonormée définie plus haut sont :

$$R_i = N(t)\, r_i(t) = \int_{t_0=0}^{t_0=t} I(t_0)\, r_i(t, t_0)\, e^{-\frac{t-t_0}{T_b}}\, dt_0$$

$$\text{pour} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \qquad (51)$$

II.3.2. Superposition des différentes causes d'évolution. — Comme précédemment, les effets des différentes perturbations, cohérentes ou aléatoires, se superposent.

En nous limitant ici au cas où le flux d'atomes et la composition du jet sont fixes, il vient :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} R_1 = -\frac{1}{T_2} R_1 - \omega_0 R_2 + \Omega_2 R_3 \\ \frac{d}{dt} R_2 = \omega_0 R_1 - \frac{1}{T_2} R_2 - \Omega_1 R_3 \\ \frac{d}{dt} R_3 = \frac{R_0}{T_b} - \Omega_2 R_1 + \Omega_1 R_2 - \frac{1}{T_1} R_3 + \frac{1}{T_m} R_4 \\ \frac{d}{dt} R_4 = \frac{R_0'}{T_b} + \frac{2}{T_m} R_3 - \frac{1}{T_1} R_4 - \frac{1}{T_m} R_4 + \frac{1}{T_{1e}} \frac{R_5^2}{N_{tot}} \\ \frac{d}{dt} R_5 = \frac{R_0''}{T_b} - \left(\frac{1}{T_{1p}} + \frac{1}{T_m} + \frac{1}{T_b}\right) R_5 \end{cases} \qquad (52)$$

avec :

$$\begin{cases} R_0 = N_{tot}\, \mathrm{Tr}\, [\rho(t, t)\, \sigma_3] \\ R_0' = N_{tot} \{1 - \mathrm{Tr}\, [\rho(t, t)\, I_A]\} \\ R_0'' = N_{tot}\, \mathrm{Tr}\, [\rho(t, t)\, F_Z] \\ \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_{1p}} + \frac{1}{T_{1e}} + \frac{1}{T_m} + \frac{1}{T_b} \\ \frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_{2p}} + \frac{1}{T_{2e}} + \frac{1}{T_m} + \frac{1}{T_b} \end{cases} \qquad (53)$$

N_{tot} est le nombre total d'atomes dans le ballon.

II.3.3. Modification des équations de Bloch. — Dans l'espace fictif défini au paragraphe I.3.2.1, l'équation d'évolution des composantes R_1, R_2, R_3 du spin fictif est :

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = -\mathbf{R} \wedge \mathbf{\Omega} - \frac{R_1 \mathbf{k}_1 + R_2 \mathbf{k}_2}{T_2} - \frac{R_3 - R_0(T_1/T_b)}{T_1} \mathbf{k}_3 + \frac{1}{T_m} R_4 \mathbf{k}_3. \qquad (54)$$

Les équations de Bloch (19) sont modifiées par l'introduction du terme en $\frac{1}{T_m} R_4$ qui traduit le couplage des spins fictifs à la polarisation atomique des états $|1, 1\rangle$ et $|1, -1\rangle$. Le degré de couplage dépend du degré d'inhomogénie du champ magnétique statique. Le couplage est nul lorsque ce champ peut être considéré comme uniforme, ainsi qu'il a été supposé dans la première partie.

II.4. **Équations aux phases et aux amplitudes.** — En projection sur le plan 1-2 de l'espace fictif, les équations de Bloch ont la même forme que dans l'approximation à deux niveaux. Il en résulte que les équations aux phases (28) et (29) sont inchangées, ainsi que les équations aux amplitudes (25) et (27).

Seule l'équation en R_3 est modifiée par le couplage par champ magnétique inhomogène. Elle devient :

$$T_1 \ddot{R}_3 + \left(2 + \frac{1}{\delta}\right) \dot{R}_3 + \left(1 + \frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta^2}\right) \frac{R_3}{T_1} = -T_1 \frac{d}{dt} [bm \cos(\varphi - \psi)] - \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) bm \cos(\varphi - \psi) + \frac{1}{\delta} \frac{R_5^2}{N_{tot}\, T_{1e}} + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \frac{R_0}{T_b} + \frac{1}{\delta} \frac{R_0'}{T_b} \qquad (55)$$

avec

$$\delta = T_m / T_1. \qquad (56)$$

II.5. **Le régime stabilisé.** — L'amplitude réduite du champ électromagnétique dans la cavité est :

$$b_s^2 = K_1 Q_c \frac{R_0}{T_b} - \frac{1 + \delta - 2/\delta}{T_1 T_2 (1 + \delta)} + K_1 Q_c \frac{(R_5^2)_s}{N_{tot}} \frac{1}{T_{1e}(1 + \delta)} + \frac{K_1 Q_c}{1 + \delta} \frac{R_0'}{T_b}. \qquad (57)$$

Le paramètre K_1 est défini par la relation (22).

II.6. **Équation du régime transitoire.** — Dans l'hypothèse où la sélectivité de la cavité est faible devant celle du système atomique, et où la fréquence propre de la cavité est égale à celle de la transition

atomique, l'équation de l'amplitude du champ électromagnétique, b, est :

$$T_1 \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\dot b}{b}\right) + \left(2 + \frac{1}{\delta}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot b}{b}\right) + \frac{1}{T_1}\left(1 + \frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta^2}\right)\frac{\dot b}{b} + T_1 \frac{d}{dt}(b^2) + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)(b^2 - b_s^2) = \frac{1}{\delta}\frac{1}{T_{1e}} K_1 Q_c \frac{R_5^2(t) - (R_5^2)_s}{N_{tot}}. \quad (58)$$

Le second membre n'est pas nul lorsque la perturbation excitant le régime transitoire est une modification du champ magnétique inhomogène, se traduisant par une variation brusque de T_m.

Au voisinage du régime stabilisé, l'équation précédente se linéarise en :

$$\begin{cases} T_1 \dddot{\varepsilon} + \left(2 + \frac{1}{\delta}\right)\ddot{\varepsilon} + \left(1 + \frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta^2}\right)\frac{1}{T_1}\dot{\varepsilon} + 2T_1 b_s^2 \dot{\varepsilon} + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) 2b_s^2 \varepsilon = \frac{K_1 Q_c}{\delta T_{1e}} b_s \frac{R_5^2(t) - (R_5^2)_s}{N_{tot}} \\ b = b_s + \varepsilon. \end{cases} \quad (59)$$

II.7. **Constante de temps du mouvement exponentiel amorti.** — Lorsque le niveau d'oscillation est suffisant pour que le retour au régime stabilisé soit oscillatoire amorti, les solutions de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (59) sont :

$$\frac{S_1}{S_2} = -\frac{1 - A}{2T_1} \pm i \frac{\left[-(1-A)^2 + 8T_1^2 b_s^2\left(1 - \frac{A}{1 + 1/\delta + A}\right)\right]^{1/2}}{2T_1} \quad (60)$$

$$S_3 = -\frac{1}{T_1}\left(1 + \frac{1}{\delta} + A\right). \quad (61)$$

Le paramètre A est solution de :

$$\left(1 + \frac{1}{\delta} + A\right)\left(-\frac{2}{\delta^2} + \frac{A}{\delta} + A^2\right) + 2T_1^2 b_s^2 A = 0. \quad (62)$$

Son développement en puissance de $1/\delta$ est :

$$A = \frac{1}{T_1^2 b_s^2}\left[\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{T_1^2 b_s^2}\right)\frac{1}{\delta^3} + \ldots\right]. \quad (63)$$

Portons notre attention sur la solution (60). La pseudo-pulsation ω_1' est telle que :

$$\omega_1'^2 + (1 - A)^2 \frac{1}{4T_1^2} = 2b_s^2\left(1 - \frac{A}{1 + \frac{1}{\delta} + A}\right). \quad (64)$$

L'enveloppe du mouvement décroît avec la constante de temps :

$$2\tau_1 = 2T_1/(1 - A). \quad (65)$$

Il est donc possible de mesurer le temps de relaxation T_1 en présence de champ magnétique inhomogène. L'erreur systématique résultant alors de la méthode de mesure est du second ordre en $1/\delta = T_1/T_m$. L'erreur est d'autant plus petite que le niveau d'oscillation est plus élevé.

Nous avons vérifié expérimentalement ces conclusions en produisant un champ magnétique inhomogène permettant de faire varier $1/\delta$ de 0 à 0,5 environ [31].

Dans la pratique de la mesure de T_1, où les seules inhomogénies du champ magnétique sont résiduelles, il est toujours possible de s'affranchir de l'erreur systématique en opérant en présence d'un champ magnétique directeur de valeur suffisamment élevée (de l'ordre de 25 milligauss).

II.8. **Constante d'intégration. Amplitude des mouvements parasites.** — Le calcul des constantes d'intégration montre que, selon les circonstances expérimentales, la phase Φ de la solution en $e^{-t/2T_1}\cos(\omega_1 t + \Phi)$ peut varier entre 0 et $\pi/2$, ce que nous avons observé.

Au mouvement oscillatoire amorti se superposent les mouvements exponentiels amortis correspondant, d'une part, à la solution en $e^{s_3 t}$ de l'équation (59) et à la solution de l'équation avec second membre, d'autre part. Nous avons observé ces solutions parasites lorsque le couplage des sous-niveaux Zeeman est fort.

Conclusion. — La vérification expérimentale des conclusions théoriques concernant le comportement dynamique de l'oscillateur et l'emploi d'une boucle

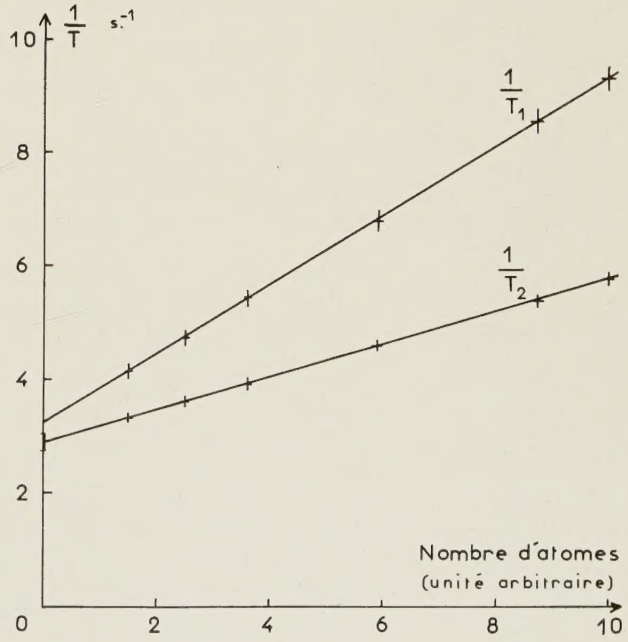

FIG. 6. — Variation des temps de relaxation T_1 et T_2 en fonction de la densité d'atomes.

de réaction a été effectuée sur nos deux masers à hydrogène [33], [34], dont nous avons étudié en détail le séparateur magnétique hexapolaire [24], [25], [35], [36], [37], [38].

La figure 6 montre, dans les conditions d'oscillation, la variation des temps de relaxation T_1 et T_2 en fonction de la densité d'atomes dans le ballon. La constante de temps T_1 est mesurée en enregistrant le comportement dynamique du maser. La mesure de T_2 est classique [21]. L'axe des abscisses est gradué en valeurs relatives du flux d'atomes pénétrant dans le ballon. Ces valeurs sont obtenues en mesurant le niveau d'oscillation en fonction du coefficient de surtension de la cavité résonnante (§ I.7).

Par trois méthodes de mesure différentes [29], nous avons atteint la valeur absolue du flux d'atomes pénétrant dans le ballon.

Nous en avons déduit la valeur de la section efficace d'échange de spin σ entre atomes d'hydrogène :

$$\sigma = (2{,}57 \pm 0{,}50) \times 10^{-15} \text{ cm}^2.$$

Ces méthodes nous ont permis de mesurer également la valeur du paramètre q [7] qui caractérise l'effet de l'échange de spin sur le niveau d'oscillation du maser. Lorsque le coefficient de surtension de la cavité résonnante vaut 50 700, la valeur de q est, pour notre maser de structure verticale :

$$q = 0{,}053 \pm 0{,}005.$$

Cette valeur permet d'obtenir un niveau d'oscillation élevé.

Tous les résultats de mesure, qui feront l'objet d'une publication séparée, forment un ensemble cohérent confirmant la validité de prévisions théoriques.

Manuscrit reçu le 4 juillet 1967.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GOLDENBERG (H. M.), KLEPPNER (D.), RAMSEY (N. F.), *Phys. Rev. Lett.*, 1960, **5**, 361.

[2] PETERS (H. E.), HOLLOWAY (J.), BAGLEY (A. S.), CUTLER (L. S.), *Appl. Physics Letters*, 1965, **6**, 2, 34.
PETERS (H. E.), KARTASCHOFF (P.), *Appl. Physics Letters*, 1965, **6**, 2, 35.

[3] VESSOT (R. F. C.), PETERS (H. E.), *IRE Trans. Instr.*, 1962, **11**, 183.

[4] MENOUND (C.), RACINE (J.), *Helv. Physica Acta*, 1962, **35**, 562.

[5] BASOV (N. G.), STRAKHOVSKIY (G. M.), NIKITIN (A. I.), NIKITINA (T. F.), TATARENKOV (V. M.), USPENSKIY (A. V.), *Radio Engin. Electronic Physics*, 1965, **10**, 1551.

[6] CRAMPTON (S. B.), ROBINSON (H. G.), KLEPPNER (D.), RAMSEY (N. F.), *Phys. Rev.*, 1966, **141**, 55.

[7] KLEPPNER (D.), BERG (H. C.), CRAMPTON (S. B.), RAMSEY (N. F.), VESSOT (R. F. C.), PETERS (H. E.), VANIER (J.), *Phys. Rev.*, 1965, **138**, A 972.

[8] BLAQUIÈRE (A.), *Ann. Radioélectricité*, 1953, **8**, 36 et 153.

[9] GRASYUK (A. Z.), ORAYEVSKIY (A. N.), *Radio Engin. Electronic Physics*, 1964, **3**, 424.

[10] ORAYEVSKIY (A. N.), USPENSKIY (A. V.), *Trudy, Phys. Inst. Acad. Sci.*, 1965, **31**, 96.

[11] AUDOIN (C.), *C. R. Acad. Sc.*, 1966, **263**, série B, 489.

[12] FANO (U.), *Rev. Mod. Physics*, 1957, **29**, 74.

[13] GROSSETÊTE (F.), *J. Physique*, 1964, **25**, 383.

[14] GROSSETÊTE (F.), Thèse, Paris, 1967.

[15] BENDER (P. L.), *Phys. Rev.*, 1963, **132**, 2154.

[16] BALLING (L. C.), HANSON (R. J.), PIPKIN (F. M.), *Phys. Rev.*, 1964, **133**, A 607.

[17] BERG (H. C.), Thèse, Harvard, 1964.

[18] CRAMPTON (S. B.), Thèse, Harvard, 1964.

[19] BERG (H. C.), *Phys. Rev.*, 1965, **137**, A 1621.

[20] GROSSETÊTE (F.), Communication privée.

[21] KLEPPNER (D.), GOLDENBERG (H. M.), RAMSEY (N. F.), *Phys. Rev.*, 1962, **126**, 603.

[22] FEYNMANN (R. F.), VERNON (F. L.), HELLWARTH (R. W.), *J. Appl. Physics*, 1957, **28**, 49.

[23] ABRAGAM (A.), Les principes du magnétisme nucléaire, P.U.F., Paris, 1961.

[24] AUDOIN (C.), SCHERMANN (J. P.), *C. R. Acad. Sc.*, 1967, **264**, série B, 647.

[25] AUDOIN (C.), Thèse, Paris, 1967.

[26] LAMB (W. E.), Quantum Mechanical Amplifiers, dans Lectures on Theoretical Physics, édité par W. E. Brittin et B. W. Downs, Interscience Publishers, N.Y., 1960.

[27] DURAND (G.), Thèse, Paris, 1966.

[28] LAMB (W. E.), *Phys. Rev.*, 1964, **134**, A 1429.

[29] AUDOIN (C.), DESAINTFUSCIEN (M.), SCHERMANN (J. P.), *C. R. Acad. Sc.*, 1967, **264**, série B, 698.

[30] AUDOIN (C.), *C. R. Acad. Sc.*, 1966, **263**, 542.

[31] AUDOIN (C.), *C. R. Acad. Sc.*, 1967, **264**, série B, 385.

[32] VANIER (J.), VESSOT (R. F. C.), Quantum Electronics Conference, Phœnix Arizona 19-21, avril 1966.

[33] AUDOIN (C.), CHECKRAHAMATOULA, *Onde élect.*, septembre 1965.

[34] DESAINTFUSCIEN (M.), SCHERMANN (J.-P.), *Onde élect.*, octobre 1966.

[35] AUDOIN (C.), *Rev. Physique Appliquée*, 1966, **1**, 2.

[36] AUDOIN (C.), *J. Physique*, 1965, **26**, 71 A.

[37] AUDOIN (C.), Deuxième cycle de conférences sur les aimants permanents, Paris, 1965.

[38] AUDOIN (C.), SEPTIER (A.), *Rev. Physique Appliquée*, 1966, **1**, 95.

Le Directeur de la Publication : Jules-Jean CHOVIN. — Imprimerie des Presses Universitaires de France, Vendôme (France)
Dépôt légal : 1-1968 N° IMP. 20 565